# 数学ⅠA範囲の復習演習その①【解答&解説】

## 1

解答　(アイ)　−2　(ウ)　1　(エ)　1　(オ)　2　(カ)　4　(キ)　5

解説

(1)　$|2x+1| \leqq 3$ から　$-3 \leqq 2x+1 \leqq 3$　よって　${}^{\text{アイ}}-2 \leqq x \leqq {}^{\text{ウ}}1$

(2)　$|2x+1| \leqq a$ から　$-a \leqq 2x+1 \leqq a$

よって　$\dfrac{-{}^{\text{エ}}1-a}{{}^{\text{オ}}2} \leqq x \leqq \dfrac{-1+a}{2}$　……②

(3)　$a=3$ のとき，(1) から ① の解は　$-2 \leqq x \leqq 1$

これを満たす整数 $x$ は　$-2,\ -1,\ 0,\ 1$　よって　$N={}^{\text{カ}}4$

$a=4$ のとき

① の解は，② より　$-\dfrac{5}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$

これを満たす整数 $x$ は　$-2,\ -1,\ 0,\ 1$　よって　$N=4$

$a=5$ のとき

① の解は，② より　$-3 \leqq x \leqq 2$

これを満たす整数 $x$ は　$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$　よって　$N=6$

ゆえに，$N$ が初めて 4 より大きくなる $a$ の値は　$a={}^{\text{キ}}5$

## 2

解答　(ア)　②　(イ)　⓪　(ウ)　②　(エ)　①

解説

(1)　$\overline{p}$ : $m \leqq k$ かつ $n \leqq k$　(${}^{\text{ア}}$②)

(2)　(i)　$k=1$ のとき　$p$ : $m>1$ または $n>1$　$q$ : $mn>1$

$\overline{p}$ : $m \leqq 1$ かつ $n \leqq 1$　$\overline{q}$ : $mn \leqq 1$

$m$，$n$ は自然数であるから　$m \leqq 1$ かつ $n \leqq 1 \iff m=1,\ n=1$

$mn \leqq 1 \iff m=1,\ n=1$

よって，$\overline{p} \iff \overline{q}$ が成り立つから，$p \iff q$ も成り立つ。

ゆえに，$p$ は $q$ であるための必要十分条件である。　(${}^{\text{イ}}$⓪)

(ii)　$k=2$ のとき　$p$ : $m>2$ または $n>2$　$q$ : $mn>4$　$r$ : $mn>2$

$\overline{p}$ : $m \leqq 2$ かつ $n \leqq 2$　$\overline{q}$ : $mn \leqq 4$　$\overline{r}$ : $mn \leqq 2$

(条件 $p$，$r$ について)

条件 $\overline{r}$ を満たす自然数 $m$，$n$ の組は $(m,\ n)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ であり，
これらはいずれも条件 $\overline{p}$ を満たす。

よって，$\overline{r} \Longrightarrow \overline{p}$ は真であるから，$p \Longrightarrow r$ も真である。

$\overline{p} \Longrightarrow \overline{r}$ は偽である (反例：$m=2$，$n=2$) から，$r \Longrightarrow p$ も偽である。

したがって，$p$ は $r$ であるための十分条件であるが，必要条件でない。(${}^{\text{ウ}}$②)

(条件 $p$，$q$ について)

$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ は偽である (反例：$m=3$，$n=1$) から，$p \Longrightarrow q$ も偽である。

条件 $\overline{p}$ を満たす自然数 $m$，$n$ の組は $(m,\ n)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)$ であり，これらはいずれも条件 $\overline{q}$ を満たす。

よって，$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$ は真であるから，$q \Longrightarrow p$ も真である。

したがって，$p$ は $q$ であるための必要条件であるが，十分条件でない。(${}^{\text{エ}}$①)

## 3

解答　(ア)　2　(イ)　4　(ウ)　4　(エ)　8　(オカ)　13　$\dfrac{(\text{キク})}{(\text{ケ})}$　$\dfrac{-9}{4}$

$-(\text{コ})-\sqrt{(\text{サ})}$　$-4-\sqrt{3}$　(シス)　−3　(セ)　1　(ソタチ)　−13

(ツ)　4　(テトナ)　−16

解説

2 次関数 ① は　$y=-x^2+(2a+4)x+b$

$=-\{x-(a+2)\}^2+a^2+4a+b+4$

よって，① のグラフ $G$ の頂点の座標は　$(a+{}^{\text{ア}}2,\ a^2+{}^{\text{イ}}4a+b+{}^{\text{ウ}}4)$

この頂点が直線 $y=-4x-1$ 上にあるから　$a^2+4a+b+4=-4(a+2)-1$

整理して　$b=-a^2-{}^{\text{エ}}8a-{}^{\text{オカ}}13$

以下，$f(x)=-x^2+(2a+4)x-a^2-8a-13$ とおく。

(1)　$G$ の頂点の座標は　$(a+2,\ -4a-9)$

$G$ は上に凸であるから，$x$ 軸と異なる 2 点で交わる条件は　(頂点の $y$ 座標)$>0$

すなわち　$-4a-9>0$　よって　$a<\dfrac{{}^{\text{キク}}-9}{{}^{\text{ケ}}4}$

また，$G$ が $x$ 軸の正の部分と負の部分の両方で交わる条件は

$f(0)=-a^2-8a-13>0$

これを解いて　$-{}^{\text{コ}}4-\sqrt{{}^{\text{サ}}3}<a<-4+\sqrt{3}$

(2)　$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 4$ における最小値を考える。

[1]　$a+2<2$ すなわち $a<0$ のとき

$f(x)$ の最小値は　$f(4)=-4^2+(2a+4)\cdot 4-a^2-8a-13$

$=-a^2-13$

$-a^2-13=-22$ とすると　$a^2=9$　$a<0$ より　$a=-3$

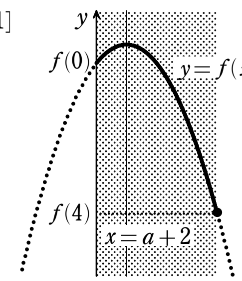
[2]　$a+2 \geqq 2$ すなわち $a \geqq 0$ のとき

$f(x)$ の最小値は　$f(0)=-a^2-8a-13$

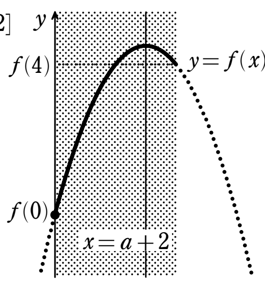
$-a^2-8a-13=-22$ とすると　$(a+9)(a-1)=0$　$a \geqq 0$ より　$a=1$

[1]，[2] より，求める $a$ の値は　$a={}^{\text{シス}}-3,\ {}^{\text{セ}}1$

[1]




[2]




$a=1$ のとき，$G$ の軸の方程式は　$x=3$

このとき，軸は $0 \leqq x \leqq 4$ の範囲にあるから，求める最大値は

$-4a-9=-4\cdot 1-9={}^{\text{ソタチ}}-13$

また，$G$ の頂点の座標は

$a=-3$ のとき　$(-1,\ 3)$，　$a=1$ のとき　$(3,\ -13)$

ゆえに，$a=-3$ のときの ① のグラフを，

$x$ 軸方向に　$3-(-1)={}^{\text{ツ}}4$，　$y$ 軸方向に　$-13-3={}^{\text{テトナ}}-16$

だけ平行移動すると，$a=1$ のときの ① のグラフと一致する。

## 4

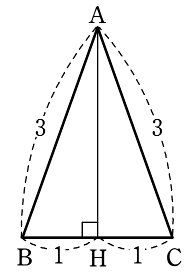
解答　$\dfrac{(\text{ア})}{(\text{イ})}$　$\dfrac{1}{3}$　$\dfrac{(\text{ウ})\sqrt{(\text{エ})}}{(\text{オ})}$　$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　$(\text{カ})\sqrt{(\text{キ})}$　$2\sqrt{2}$　$\dfrac{\sqrt{(\text{ク})}}{(\text{ケ})}$　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{\sqrt{(\text{コ})}}{(\text{サ})}$　$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　$\dfrac{\sqrt{(\text{シ})}}{(\text{ス})}$　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(セ)　③　$\dfrac{\sqrt{(\text{ソ})}}{(\text{タ})}$　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(チ)　1

$\dfrac{(\text{ツ})}{(\text{テ})}$　$\dfrac{1}{2}$

解説

点 A から線分 BC に垂線 AH を下ろす。




△ABC は AB＝AC＝3，BC＝2 の二等辺三角形であるから

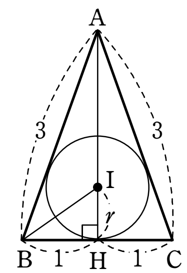
$\mathrm{BH}=\mathrm{CH}=1$，　$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

よって　$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{{}^{\text{ア}}1}{{}^{\text{イ}}3}$，

$\sin\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{{}^{\text{ウ}}2\sqrt{{}^{\text{エ}}2}}{{}^{\text{オ}}3}$

△ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}={}^{\text{カ}}2\sqrt{{}^{\text{キ}}2}$

△ABC の内接円の半径を $r$ とすると　$\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{AC})=2\sqrt{2}$




すなわち　$\dfrac{1}{2}r(3+2+3)=2\sqrt{2}$　よって　$r=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ク}}2}}{{}^{\text{ケ}}2}$

直角三角形 BHI において

$\mathrm{BI}=\sqrt{\mathrm{BH}^2+\mathrm{IH}^2}=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{コ}}6}}{{}^{\text{サ}}2}$

別解　(△ABC の内接円の半径について)

△ABC の内接円の半径は IH の長さに等しい。

点 I は ∠ABC の二等分線上にあるから　AI : IH＝AB : BH＝3 : 1

よって　$\mathrm{IH}=\dfrac{1}{4}\mathrm{AH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(1)　△PBQ の外接円の半径を $R$ とおく。

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\sin\angle\mathrm{PBQ}}=2R$　よって　$2R=\dfrac{2}{3}\div\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{シ}}2}}{{}^{\text{ス}}2}$

円 I と円 O の位置関係を調べる。

△PBQ は BP＝BQ の二等辺三角形であるから，外接円の中心 O は ∠PBQ の二等分線上にある。

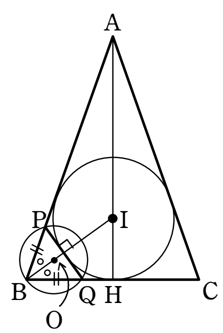
また，△ABC の内接円の中心 I は，∠ABC すなわち ∠PBQ の二等分線上にある。

よって，B，I，O は一直線上にある。

$2R+r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，$\mathrm{BI}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ である。

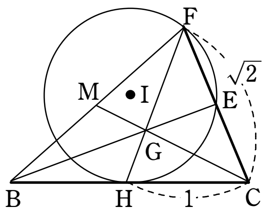
$2R+r>\mathrm{BI}$ であるから，円 I と円 O は異なる 2 点で交わる。

(${}^{\text{セ}}$③)



(2)　方べきの定理により　　$\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CF}=\mathrm{CH}^2$

すなわち　　$\mathrm{CE}\cdot\sqrt{2}=1^2$　　　よって　　$\mathrm{CE}=\dfrac{{}^{\text{ツ}}\sqrt{2}}{{}^{\text{タ}}2}$




$\mathrm{EF}=\mathrm{CF}-\mathrm{CE}=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{CE}}={}^{\text{チ}}1$$

よって，点 E は線分 CF の中点である。

さらに，点 D は点 H と一致し，線分 BC の中点であるから，点 G は △BCF の重心である。

したがって　　$\dfrac{\mathrm{GM}}{\mathrm{CG}}=\dfrac{{}^{\text{ツ}}1}{{}^{\text{テ}}2}$

$\boxed{5}$

解答　（アイウ）126　　（エオ）70　　（カキ）56　　$\dfrac{（ク）}{（ケ）}$ $\dfrac{4}{9}$　　$\dfrac{（コ）}{（サシス）}$ $\dfrac{1}{126}$

$\dfrac{（セ）}{（ソタ）}$ $\dfrac{8}{63}$　　$\dfrac{（チ）}{（ツ）}$ $\dfrac{2}{7}$　　$\dfrac{（テ）}{（ト）}$ $\dfrac{5}{3}$

解説

9 枚のカードから 5 枚のカードを同時に取り出す方法は

$${}_9\mathrm{C}_5={}_9\mathrm{C}_4=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}={}^{\text{アイウ}}126\ (\text{通り})$$

(1)　5 のカードがある取り出し方は，5 以外のカードから 4 枚と 5 のカードを取り出す場合であるから　　${}_8\mathrm{C}_4=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}={}^{\text{エオ}}70\ (\text{通り})$

5 のカードがない取り出し方は，5 以外のカードから 5 枚を取り出す場合であるから

$${}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}={}^{\text{カキ}}56\ (\text{通り})$$

別解　(5 のカードがない取り出し方)

すべての取り出し方から，5 のカードがある取り出し方を除いたものであるから

$126-70=56$ (通り)

(2)　得点が 0 点となるのは，5 のカードがない場合であるから，その確率は　$\dfrac{56}{126}=\dfrac{{}^{\text{ク}}4}{{}^{\text{ケ}}9}$

得点が 1 点となるのは 5 が一番小さい場合であるから，そのような取り出し方は，5，6，7，8，9 のカードを取り出す 1 通りのみである。

よって，求める確率は　　$\dfrac{{}^{\text{コ}}1}{{}^{\text{サシス}}126}$

得点が 2 点となるのは 5 が 2 番目に小さい場合であるから，そのような取り出し方は，5 のカードと，1 ～ 4 のカードから 1 枚，6 ～ 9 のカードから 3 枚取り出す場合であり

$${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_3=16\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は　　$\dfrac{16}{126}=\dfrac{{}^{\text{セ}}8}{{}^{\text{ソタ}}63}$

得点が 3 点となるのは 5 が 3 番目に小さい場合であるから，そのような取り出し方は，5 のカードと，1 ～ 4 のカードから 2 枚，6 ～ 9 のカードから 2 枚取り出す場合であり

$${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=36\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は　　$\dfrac{36}{126}=\dfrac{{}^{\text{チ}}2}{{}^{\text{ツ}}7}$

また，得点が 4 点となる取り出し方は得点が 2 点となる場合と同じ数だけあり，得点が 5 点となる取り出し方は得点が 1 点となる場合と同じ数だけある。

ゆえに，得点が 4 点となる確率は　$\dfrac{16}{126}$，　得点が 5 点となる確率は　$\dfrac{1}{126}$

したがって，得点の期待値は

$$0\times\frac{56}{126}+1\times\frac{1}{126}+2\times\frac{16}{126}+3\times\frac{36}{126}+4\times\frac{16}{126}+5\times\frac{1}{126}=\frac{210}{126}=\frac{{}^{\text{テ}}5}{{}^{\text{ト}}3}$$